Арифметические прогрессии в структуре натуральных чисел.
(Элементы алгебраической арифметики)

Г.Г.Рябов, В.А.Серов
НИВЦ МГУ

Работа поддержана грантом РФФИ 16-07-01071

Введение

- Супервычисления подразумевают структуры для распараллеливания при обеспечении высокой производительности счета, но и структуры для обеспечения высокой точности при вычислениях. Пример - работа с большими целыми числами, где классификация зависит от значения самого младшего разряда числа.
- Нужен ли специальный процессор для эффективной работы с натуральными числами? Да, если он обеспечивает вычисление новых структурных свойств натуральных.
- Слияние ветвей математики-теории чисел, математической логики, комбинаторики, теории представлений, где целочисленная арифметика (в более широком смысле, чем набор элементарных действий) играет важную роль.
- Одному из подходов в этом направлении посвящен текст данной презентации.

Арифметические прогрессии в теории чисел

Фундаментальные результаты в области теории чисел, основанные на свойствах арифметических прогрессий принадлежат П.Г.Дирихле (1805-1859).

Тематика, рассмотренная в презентации опирается на эти результаты и связана со свойствами обобщений таких прогрессий при исследовании структуры целых чисел.

Основные принятые обозначения:

N(>3) - множество натуральных >3;

P(>3) - множество простых >3;

Sm={m+kd}; k=0,1,2,… - множество членов арифметической прогрессии с разностью d и начальным членом m.

Представление множества натуральных на базе шести арифметических прогрессий

- Представление множества натуральных в виде 6-кортежей:
  N($\geq$2)=<2,3,4,5,6,7><8,9,10,11,12,13, ><14,15,16,17,18,19>…
- Представляя каждый кортеж как столбец чисел и последовательно располагая эти столбцы, получаем вдоль строк множество из 6 бесконечных арифметических прогрессий с разностью d=6:

  S2={2+6k}=2, 8,14,20,26,32,38,44,50,…четные,2^неч.степень

  S3={3+6k}=3, 9,15,21,27,33,39,45,…нечетные /3

  S4={4+6k}=4,10,16,22,28,34,40,46,…четные,2^чет.степень

  S5={5+6k}=5,11,17,23,29,35,41,47,…нечетные,∞простых:условиеДирихле(5,6)=1

  S6={6+6k}=6,12,18,24,30,36,42,48,…четные /6

  S7={7+6k}=7,13,19,25,31,37,43,49,…нечетные,∞простых:условиеДирихле(7,6)=1
- USi=N($\geq$2);
- Si$\cap$Sj=$\emptyset$; i$\neq$j;

Теорема о множестве простых: P(>3) $\subseteq$ S5US7

Все простые>3 содержатся только в двух прогрессиях: S5 и S7 (простые подчеркнуты, близнецы отмечены вертикальной чертой).

S5=$\underline{5}$,$\underline{11}$,$\underline{17}$,$\underline{23}$,$\underline{29}$,35$\underline{,41,47}$,$\underline{53}$,$\underline{59}$,65,$\underline{71}$,77,$\underline{83}$…

| | | | | | |

S7=$\underline{7}$,$\underline{13}$,$\underline{19}$,25,$\underline{31}$,$\underline{37}$,$\underline{43}$,49,55,$\underline{61}$,$\underline{67}$,$\underline{73}$,$\underline{79}$,85,…

Арифметические и полугрупповые свойства S2÷S7

- Над членами прогрессий S2÷S7, как над неотрицательными натуральными, определены действия сложения , умножения, возведения в степень, результаты которых также являются членами этих прогрессий.
- Номер прогрессии, которой принадлежит результат, однозначно вычисляется по номерам прогрессий, которым принадлежат операнды.
- Далее бинарные отношения между номерами прогрессий по отношению к этим трем действиям представлены в табличном виде.

Бинарные отношения между S2÷S7

Бинарные отношения между классами S2~S7

+	2	3	4	5	6	7
2	4	5	6	7	2	3
3	5	6	7	2	3	4
4	6	7	2	3	4	5
5	7	2	3	4	5	6
6	2	3	4	5	6	7
7	3	4	5	6	7	2

X	2	3	4	5	6	7
2	4	6	2	4	6	2
3	6	3	6	3	6	3
4	2	6	4	2	6	4
5	4	3	2	7	6	5
6	6	6	6	6	6	6
7	2	3	4	5	6	7

↑	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	7	5	7	5	7	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7

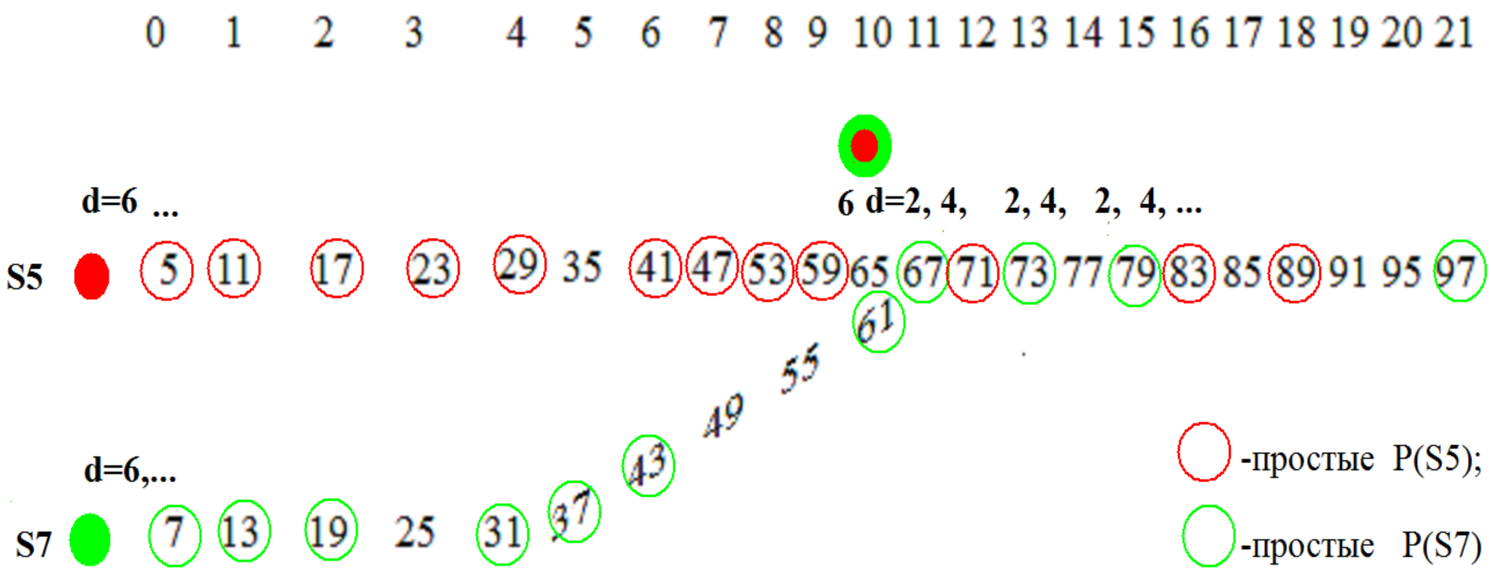
В аддитивной полугруппе роль "0" выполняет S6;
В мультипликативной полугруппе роль "1"выполняет S7;
Полугруппы -конечные (по 6 инфинитарных элементов).

Действия над прогрессиями S2÷S7, как комбинаторными объектами.

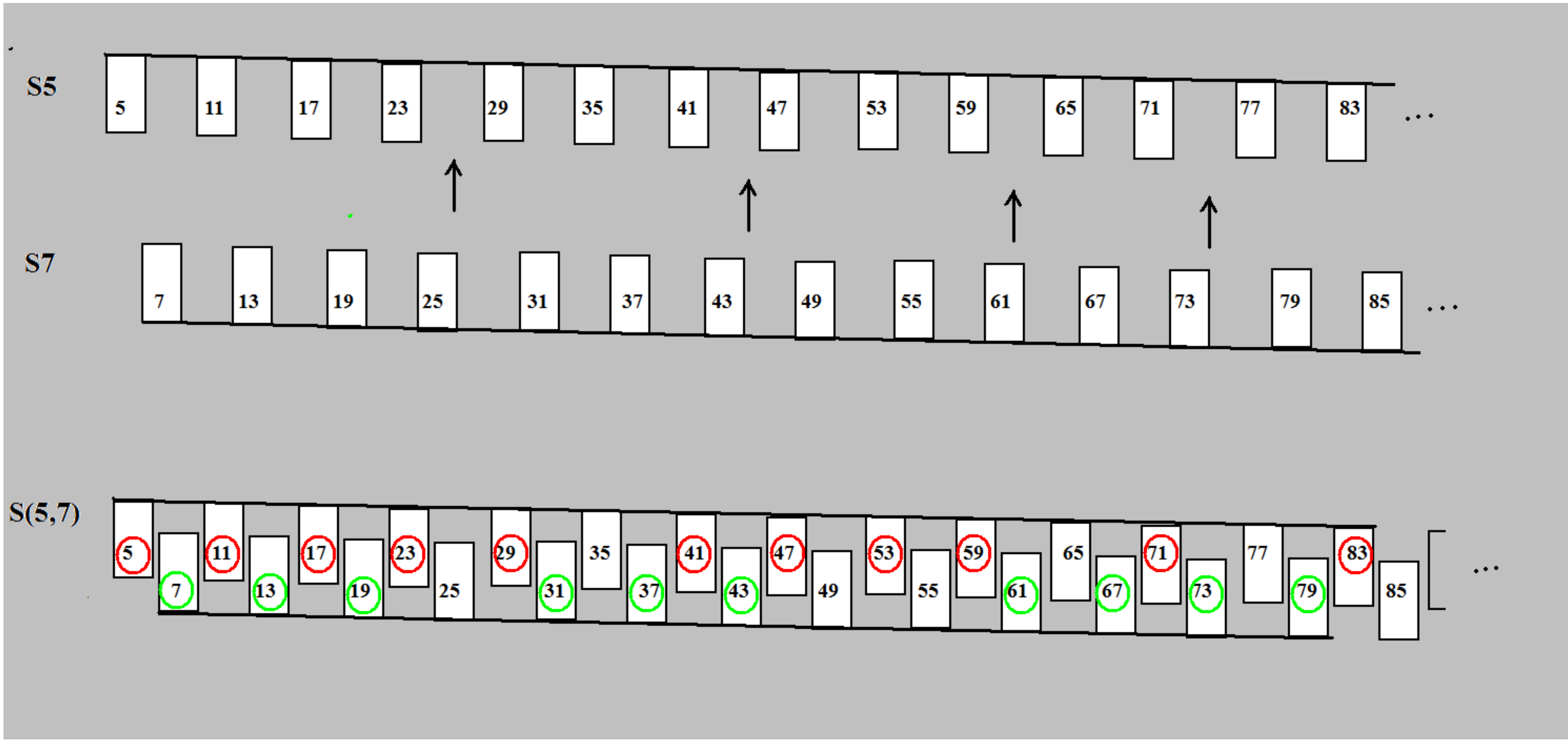
Прогрессия Si - бесконечная последовательность натуральных со свойствами, зависящими от их порядкового номера в прогрессии Si и от свойств натуральных в других прогрессиях S2÷S7. Отсюда - «действия» для совместного рассмотрения различных пар-троек и т.д. из них. Ранее был приведен пример пары S5, S7 с простыми, в т.ч. и с близнецами (слияние, вложение прогрессий).

Слияние прогрессий с сохранением свойств натуральных и пример квази-прогрессии

Пример слияния прогрессий S5 и S7 в квази-прогрессию с d=2,4;



Принцип застежки «Молния» при слиянии двух прогрессий



Квази-прогрессии на базе S2÷S7, как слияние прогрессий

- Бинарные
  (S4/5;d=1,5)={4,5,10,11,16,17,22,23,28,29,34,35,40,41,…}
  (S2/S7;d=5,1)={2,7,8,13,14,19,20,25,26,31,32,37,38,43,44,..}
- Тернарные
  (S5/6/7;d=1,1,4)={5,6,7,11,12,13,17,18,19,23,24,25,29,…}
- Кватернарные
  (S3,5,6,7;d=2,1,1,2)={3,5,6,7,9,11,12,13,15,16,17,19,…}
- Бинарные слияния {{4,5}} и {{2,7}} содержат четные и прогрессии только с теми простыми, которые в сумме их дают.
- Тернарное {{5,6,7}}содержит четные, кратные 6 и прогрессии S5 и S7 с простыми, которые только парами дают их в сумме.

Слияния {{2,4,5}} ;{{3,5,6,7}};

- {{2,4,5}}-слияние для анализа S4, где S2 как ½(S4)
- Если есть S6, то и S5, S7
- Структура множеств половинок членов прогрессий {½(S4)}=S2; { ½(S2)}=S4; {½(S6)}={{S3,S6}};
- {1/2(S6)}={3,<u>6</u>,9,<u>12</u>,15,<u>18</u>,21,<u>24</u>,27,<u>30</u>,33,<u>36</u>,39,<u>42</u>,…}
- {{3,5,6,7}}-слияние для анализа S6, где S3 как ½(S6)

Слияние {{ 3,4,5,6,7,}} и гипотеза Лежандра.

{{ 3,4,5,6,7}}= d 1,1,1,1,2;

Между двумя квадратами двух последовательных натуральных лежит по крайней мере одно простое.

3 $\boxed{4}$ 5 6 7 $\boxed{9}$ 10 11 12 13 15 $\boxed{16}$ 17 18 19 21 22 23 24 $\boxed{25}$ 27 28 29 30 31 33 34 35 $\boxed{36}$ 37 39 40 41 42 43 45 46 47 48 $\boxed{49}$ 51 52

53 54 55 57 58 59 60 61 63 $\boxed{64}$ 65 66 67 69 70 71 72 73 75 76 77 78 79 $\boxed{81}$ 82 83 84 85 87 88 89 90 91 93 94 95 96 97 99 $\boxed{100}$ 101 102 103

Классификация натуральных, проблема Гольдбаха и другие.

- Классификация натуральных на основе прогрессий S2÷S7 и представления их слияний в виде квази-прогрессий позволяет детализировать проблемы Гольдбаха и оценки мощности множества простых-близнецов.
- Проблема Гольдбаха - Каждое четное натуральное есть сумма двух простых ?
- Число простых-близнецов-бесконечно ?

Отношения между числами классов S2-S7 по отношению к проблемам Гольдбаха, Лежандра и др.

Бинарные отношения между классами S2~S7

+ S	S= 2	3	4	5	6	7
2	4	5	6	7	2	3
3	5	6	7	2	3	4
4	6	7	2	3	4	5
5	7	2	3	4	5	6
6	2	3	4	5	6	7
7	3	4	5	6	7	2

X S	S= 2	3	4	5	6	7
2	4	6	2	4	6	2
3	6	3	6	3	6	3
4	2	6	4	2	6	4
5	4	3	2	7	6	5
6	6	6	6	6	6	6
7	2	3	4	5	6	7

Простые из класса S5-p1,p2$\in$P(S5). Простые из класса S7-p3,p4$\in$P(S7)

Всегда только : p1+p2=четное$\in$S4; p3+p4=четное$\in$S2; p1+p3 $\in$ S6;

Полуаддитивная каноническая запись натуральных на базе классов S2÷S7

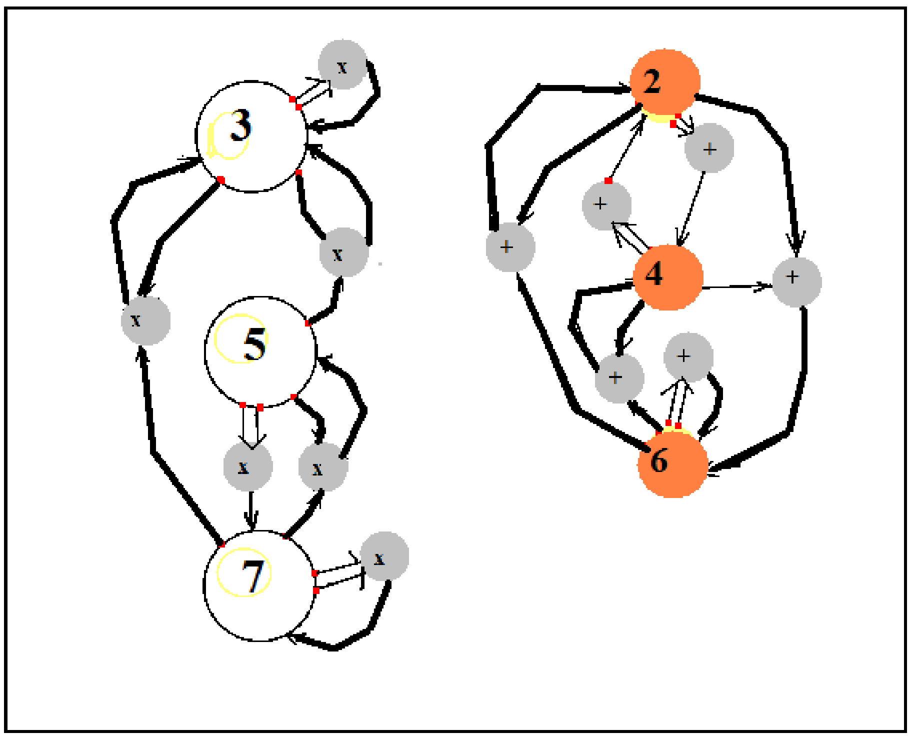
- Единственность каждого натурального среди S2÷S7дает возможность его канонического представления в системе классов S2÷S7.
- Последовательность действий для вычисления такого представления: n-заданное натуральное;

  $n(\mathrm{mod}6) \equiv a1$; $(n-a1)(\mathrm{mod}6)=a2$;$(n-a1-a2)(\mathrm{mod}6)=a3$;….

  $499=7(\mathrm{mod}6)$; $499-7=492/6=82(\mathrm{mod}6)=4$;$82-4=78/6=13=7(\mathrm{mod}6)$;

  $13-7=6(\mathrm{mod}6)=1 \Rightarrow$ **7471(1747)**$=1\mathrm{x}6+7)6+4)6+7$**=499**;
- $499 \in P(S7) \in S7$-класс, содержащий ∞ простых(условие Дирихле)
- Канонический вид натурального-классификатор натуральных – отображение натурального на себя (автоморфизм).
- ПАКЗ показывает числа каких классов при суммировании дают данное натуральное (могут ли быть среди них простые из S5,S7)

Марковские схемы в вычислительном процессе над N и эргодические свойства распределения результатов по классам S2-S7.



Множества чисел в классах представлены вершинами v2-v7 орграфа , исходящие ребра-движение чисел-операндов входящие ребра – результат операции. Спаренные ребра – числа-операнды из одного класса. Асимметрия при x : v3(4,3); v5(4,1); v7(4,2)

Краткие итоги

- Предложено представление множества неотрицательных натуральных >2 в виде объединения множеств членов шести бесконечных арифметических прогрессий S2,S3,S4,S5,S6,S7 с разностью d=6 и соответствующими начальными членами - 2,3,4,5,6,7.
- На основании свойств этого представления доказана Теорема: «Все простые >3 содержатся только в двух прогрессиях S5 и S7, для которых выполняется условие Дирихле (5,6)=1; (7,6)=1.
- Предложена классификация неотрицательных натуральных по классам, соответствующим прогрессиям S2÷S7. Отсюда следует возможность двумерного представления натуральных: номер класса+ номер члена в прогрессии.

Краткие итоги (продолжение)

- Приведены бинарные отношения между классами по отношению к сложению и умножению.
- Результат операции (+,x) над произвольными натуральными из классов Si и Sj однозначно принадлежит классу Sk (k однозначно соответствует паре i,j).
- На основании бинарных отношений между классами можно рассматривать класс (множество членов прогрессии) как член конечных полугрупп (по + и x) с ролью «0», выполняемой S6 в аддитивной полугруппе, и ролью «1», выполняемой S7 в мультипликативной полугруппе, т.о. имеем конечные полугруппы с бесконечными членами.

Краткие итоги (продолжение)

- На основании бинарных отношений справедливы следующие утверждения:

  Сумма двух простых из P(S5) равна только четному из S4.

  Сумма двух простых из P(S7) равна только четному из S2.

  Сумма простых из P(S5) и P(S7) равна только четному из S6.
- Число с каноническим разложением a= Πpj Πpi , при $i=1\div s;j=1\div r$; $pi\in P(S5)$; $pj\in P(S7)$ принадлежит $a\in$ S5, если s-нечетное, и $a\in S7$,если s-четное.
- Введено действие слияния над прогрессиями $S2\div S7$.

Краткие итоги (продолжение)

- Слияние двух прогрессий Si,Sj, $i\neq j$ из $S2\div S7$состоит в размещении членов одной прогрессии между членами другой прогрессии без нарушения порядка возрастания общего множества членов. «Налезание» членов одной прогрессии на члены другой прогрессии невозможно, т.к. $Si\cap Sj=\varnothing$, $i\neq j$.
- Слияние прогрессий можно сравнить с застежкой «молния».
- Такое слияние можно представить как единую арифметическую квази-прогрессию с переменной разностью d от члена к члену этого множества, задаваемой композицией натуральных d1,d2,d3,d4, для которой $\Sigma di=6$; $0<di<5$, с цикличностью повторения.
- Действие слияния коммутативно, дистрибутивно. Рассмотрены бинарные, тернарные и кватернарные слияния из $S2\div S7$.
- Предложена полуаддитивная каноническая запись натуральных на основе $S2\div S7$.

Публикации за 2016г.

- G. G. Ryabov, V. A. Serov, “ О структуре натуральных чисел на базе шести арифметических прогрессий,” International Journal of Open Information Technologies, 2016, vol. 4, no. 4, pp. 49–53. Available (in russian): http://injoit.org/index.php/j1/article/view/277
- G. G. Ryabov, V. A. Serov, “Classification of natural numbers based on arithmetic progressions with a difference 6,” International Journal of Open Information Technologies, 2016, vol. 4, no. 12, pp. 13–15. Available: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/355/314
- Международная Конференция “Ломоносовские чтения – 2016”, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 18-27 апреля 2016. Тема доклада: “О генетической структуре простых чисел в структуре натуральных”.